Apellido: .... Nombre: ....Legajo:..........................

2do Parcial - **MATEMÁTICA SUPERIOR**
03/07/2017

Tema 43

1 a.1	1 a.2	1 b	2 a	2 b	3 a	3 b	4 a	4 b	5 a	5 b	c+tp	Notal Final
0.5 p	0.5 p	1 p	1 p	0.5 p	1 p	1 p	0.5 p	1 p	1.5p	0.5 p	1 p	

SE APRUEBA CON 6 PUNTOS. TIEMPO DISPONIBLE: 2 HORAS

Ej. n° 1: Dada la función: $f(x) = x^2 - 3x - e^{-x}$

a) Indique V o F y justifique correctamente: a.1) En total, f(x) tiene 2 raíces reales.

a.2) Para hallar la raíz positiva por el método de Regula Falsi debe dejarse fijo el extremo b.

b) Partiendo de $x_0 = 0$ utilizando el método de Newton-Raphson realice tres iteraciones e indique si se puede asegurar un error menor a 10^{-3} a la raíz más cercana al valor inicial.

Ej. n° 2: Dados los siguientes pares ordenados de datos:

x	-1	0	2	5	6
y	-10	-3	-13	2	39

a) Indique la cantidad de polinomios de grado 2, 3 y 5 que pasan por todos los puntos dados.

b) Estime la derivada segunda en x=2 utilizando los puntos y fórmula más convenientes.

Ej. n° 3: Dada la integral: $\int_3^5 x^3 \ln(x)\, dx$

a) Indique el mayor valor de h racional no periódico para que al calcular la integral por Trapecios con subintervalos de longitud h, se asegure un error $E \leq 10^{-3}$

b) Resuelva por Simpson tomando un valor de h de los siguientes: h=0,15 ; h=0,25 ; h=0,4

Ej. n° 4: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3k-1 & 3 & 1 \\ 2 & 1+k^2 & 2 \\ 3 & 4 & 10-k \end{pmatrix}$ cuyos elementos son enteros y positivos.

a) Determine el valor de $k \in Z$ tal que la matriz A sea estrictamente diagonal dominante.

b) Con dicho valor de k, resuelva el sistema $A \bullet X = B$ con $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = (0, 1, -1)$ y realizando las iteraciones necesarias para garantizar error menor que 10^{-1} tomando norma infinito vectorial.

$$w_0 = y_0$$
$$k_1 = hf(t_i; w_i)$$
$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}; w_i + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}; w_i + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf(t_{i+1}; w_i + k_3)$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Ej. n° 5: Dado el problema de valor inicial:

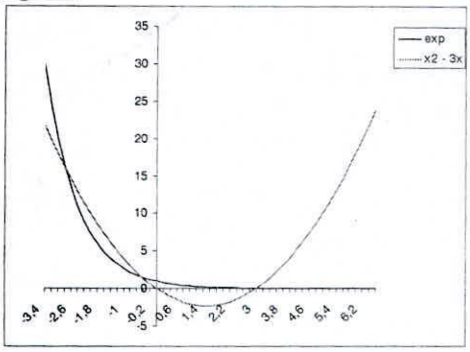
$y' = 2ty^2$ con $y(0) = 1$ $y(0.6) = ?$

a) Calcule por Runge Kutta de orden 4 con h=0.6

b) Halle el error relativo sabiendo que la solución exacta es $y(t) = 1/(1-t^2)$

SOLUCIÓN tema 43

Ej. 1 $x^2 - 3x = e^{-x}$ Falso. Tiene 3 raíces en [-3,-2] , [-1,0] y [3,4]



b) $f(x) = x^2 - 3x - e^{-x}$ $f'(x) = 2x - 3 + e^{-x} > 0$ en [3,4] $f''(x) = 2 - e^{-x} > 0$ en [3,4] **Verd.**

c) Verdadero

x	fx	f,x
0	-1	-2
-0,5	0,10127873	-2,35127873
-0,45692611	0,0003476	-2,33464003

Ej. 2 a) Tabla:

-1	-10			
0	-3	7		
2	-13	-5	-4	
5	2	5	2	1
6	39	37	8	1

$P(x) = -10 + 7(x+1) - 4(x+1)x + (x+1)x(x-2) = x^3 - 5x^2 + x - 3$

Existen 0 de grado 2, 1 de grado 3 e infinitos de grado 5.

b) $f''(2) = (f(-1) - 2 f(2) + f(5)) / 3^2 = 2$ (formula central)

Ej. 3 a) $f(x) = x^3 \ln(x)$ $f'(x)=3x^2 \ln(x) + x^3 x^{-1} = x^2 (3 \ln(x) + 1)$
$f''(x) = 2x (3 \ln(x) + 1) + x^2 \; 3x^{-1} = x (6 \ln(x) + 5)$

MAX de $f''(x)$ es en $f''(5) = 73{,}2831374$

$2/12\, h^2\, 73{,}2831374 < 0{,}001$ entonces $h < 0{,}009048438$ Tomar $h = 0{,}008$ $n = 250$

c) Con h=0,25. Tabla:

0	3	29,6625318
1	3,25	40,461016
2	3,5	53,7122123
3	3,75	69,7019681
4	4	88,7228391
5	4,25	111,07364
6	4,5	137,059053
7	4,75	166,98928
8	5	201,179739

E 230,842271
I 388,225904
P 279,494104

A 195,227841

Ej. 4

a) $3k-1 > 4 \quad \wedge \quad 1 + k^2 > 4 \quad \wedge \quad 10 - k > 7$

$k > 5/3 \quad \wedge \quad k^2 > 3 \quad \wedge \quad k < 3$ como k es entero, solo puede ser: $k = 2$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x_{n+1} = \dfrac{4 - 3y_n - z_n}{5}$ $y_{n+1} = \dfrac{6 - 2x_{n+1} - 2z_n}{5}$ $z_{n+1} = \dfrac{3 - 3x_{n+1} - 4y_{n+1}}{8}$

x	y	z
0	1	-1
0,4	1,44	-0,495
0,035	1,384	-0,330125
0,035625	1,3178	-0,29725938

0,4	0,44	0,505	**0,505**
0,365	0,056	0,164875	**0,365**
0,000625	0,0662	0,03286563	**0,0662**

Ej 5

$y' = 2\,t\,y^2 = f(t,y)$

t	y	f	k		h	0,6
0	1	0	0			
0,3	1	0,6	0,36			
0,3	1,18	0,83544	0,501264			
0,6	1,501264	2,70455232	1,62273139	1,55754323		

Valor exacto: $y(0.6) = 1.5625 \Rightarrow er = \dfrac{1.5625 - 1.55754323}{1.5625} \cong 0.32\ \%$

Mat. Superior - 2° parcial. | tema 43 3-7-17

① Dada la función $f(x) = x^2 - 3x - e^{-x}$

a) Indique V o F y justifique correctamente.

a1) En total, f(x) tiene 2 raíces reales **F**

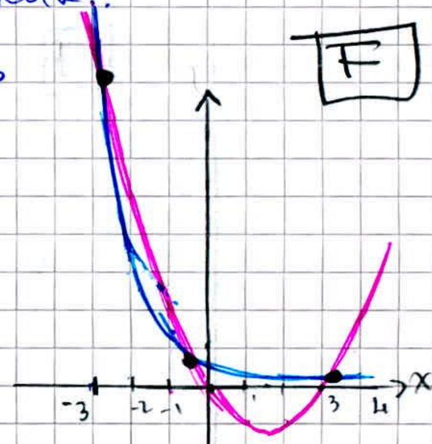
$\underbrace{e^{-x}}\ = \underbrace{x^2 - 3x} = x(x-3)$

tiene 3 raíces:

1 en $[-3;-2]$

1 en $[3;4]$

1 en $[-1;0]$



a2) Para hallar la raíz positiva por el método de Regula-Falsi debe fijarse el extremo b **V**

Raíz positiva $\in [3;4] \rightarrow a=3 \quad , b=4$

$f'(x) = \underbrace{2x - 3 + e^{-x}}_{>0 \forall x \in [3;4]} \rightarrow f''(x) = 2 - e^{-x} > 0 \ \forall x \in [3;4]$

$sg\, f'(x) = sg\, f''(x) \quad \forall x \in [3;4] \rightarrow$ se fija $b=4$

b) Partiendo de $x_0 = 0$ utilizando el método de Newton-Raphson realice tres iteraciones e indique si se puede asegurar un error menor a 10^{-3} a la raíz más cercana al valor inicial

$X_{n+1} = X_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_0 = 0$

$x_1 = -0{,}5$

$x_2 = -0{,}4569261066$

$x_3 = -0{,}4567772185$

$\boxed{\varepsilon < 10^{-3}}$

$\boxed{\text{Converge al } x_0 = 0}$

② Dados los sig. pares ordenados de datos:

x	-1	0	2	5	6
y	-10	-3	-13	2	39

No es equiespaciado

a) Indique la cantidad de Polinomios de grado 2, 3 y 5 que pasan por todos los puntos dados

x_i	$f(x_i)$	$\Delta^1 F$	$\Delta^2 F$	$\Delta^3 F$	
-1	-10	7	-4	1	0
0	-3	-5	2	1	
2	-13	5	8		
5	2	37			
6	39				

0 polinomios de grado 2

1 polinomio de grado 3

∞ polinomios de grado 5

6

b) Estime la derivada segunda en $x=2$ utilizando los punto y fórmula más convenientes

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \longrightarrow f''(2) = \frac{f(5) - 2f(2) + f(-1)}{3^2} =$$

$$= \frac{2-(-26)-10}{9} = \boxed{2 = f''(2)}$$

③ Dada la integral $\int_3^5 x^3 \ln(x)\, dx$

a) Indique el mayor valor de h racional no periódico para que al calcular la integral por Trapecios con subintervalos de longitud h se asegure un error $E \leq 10^{-3}$

$$|E_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\varphi)| = \frac{\cancel{2}}{\cancel{12}_6} h^2 |f''(\varphi)| < 10^{-3}$$

$f(x) = x^3 \ln(x)$

$f'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^2 = x^2(3\ln(x)+1)$

$f''(x) = 2x(3\ln(x)+1) + x^2 \frac{3}{\cancel{x}} = 6x\ln(x) + 2x + 3x = x(6\ln(x)+5) = f''(x)$

$f''(x)$ es máx en $x=5 \rightarrow \boxed{|f''(\varphi)|_{máx} = 73{,}28313737}$

$$\rightarrow h^2 < \frac{10^{-3} \cdot 6}{73{,}28313737} \rightarrow h^2 < 0{,}00008187\ldots \rightarrow h < 0{,}009048\ldots$$

$$m \cdot h = b-a \rightarrow m = \frac{2}{h} \rightarrow h < 0{,}009048 \rightarrow m > 221{,}03$$

$m = 222 \rightarrow h = 0{,}009009$ $\quad \boxed{m = 250 \rightarrow h = 0{,}008}$

b) Resuelva por Simpson tomando un valor de h de los siguientes: $h=0{,}15$, $h=0{,}25$, $h=0{,}4$

$$m \cdot h = b-a \rightarrow m = \frac{2}{h} \longrightarrow m_1 = \frac{2}{0{,}15} = 13{,}5$$ No se puede usar

$$m_2 = \frac{2}{0{,}25} = 8 \rightarrow \boxed{h = 0{,}25}$$

$$m_3 = \frac{2}{0{,}4} = 5$$ No se puede usar para Simpson

i	x_i	$f(x_i)$
0	3	29,662532
1	3,25	40,461016
2	3,5	53,712212
3	3,75	69,701968
4	4	88,72283911
5	4,25	111,07364
6	4,5	137,05905
7	4,75	166,989280
8	5	201,1797391

$$A_S = \frac{h}{3}(E + 4I + 2P) =$$

$$= \frac{0{,}25}{3}(230{,}8422711 + 1552{,}903616 + 558{,}98820)$$

$$\boxed{A_S = 195{,}2278408}$$

tema 43

3-7-17

(4) Dada la matriz A, cuyos elementos son enteros y positivos.

$$A = \begin{pmatrix} 3k-1 & 3 & 1 \\ 2 & 1+k^2 & 2 \\ 3 & 4 & 10-k \end{pmatrix}$$

a) Determine el valor de $k \in \mathbb{Z}$ tal que la matriz A sea estrictamente diagonal dominante.

"a ojo" veo que $\boxed{k = 2}$ cumple lo requerido

b) Con dicho valor de k hallado resuelva el sistema $A \cdot X = B$ con $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Seidel partiendo de $X^0 = (0, 1, -1)$ y realizando las iteraciones necesarias para garantizar error menor que 10^{-1} tomando norma infinito vectorial.

$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 4 \\ 2x + 5y + 2z = 6 \\ 3x + 4y + 8z = 3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x^k = \dfrac{4 - 3y^{k-1} - z^{k-1}}{5} \\ y^k = \dfrac{6 - 2x^k - 2z^{k-1}}{5} \\ z^k = \dfrac{3 - 3x^k - 4y^k}{8} \end{cases}$$

$X_0 = (0 ; 1 ; -1)$

$X_1 = (0,4 ; 1,44 ; -0,495)$

$X_2 = (0,035 ; 1,384 ; -0,330125)$

$X_3 = (0,035625 ; 1,3178 ; -0,29725938)$

(5) Dado el problema de valor inicial: $y' = 2ty^2$ con $y(0) = 1$

$y(0,6) = ?$

$f_{(t,y)} = 2ty^2$

a) Calcule por R.K. de orden 4 con $h = 0,6$

$k_1 = hf(t_i ; w_i)$

$k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2} ; w_i + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2} ; w_i + \frac{k_2}{2})$

$k_4 = hf(t_i + h ; w_i + k_3)$

$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$t_0 = 0 \qquad w_0 = 1$

$t_1 = 0,6 \qquad w_1 =$

$k_1 = 0,6 f(0;1) = 0$

$k_2 = 0,6 f(0,3;1) = 0,6 \times 2 \times 0,3 \times 1^2 = 0,36$

$k_3 = 0,6 f(0,3; 1,18) = 0,6 \times 2 \times 0,3 \times 1,18^2 = 0,501264$

$k_4 = 0,6 f(0,6; 1,501264) = 0,6 \times 2 \times 0,6 \times 1,501264^2 =$

$w_1 = 1 + \frac{1}{6}(0 + 2 \times 0,36 + 2 \times 0,501264 + 1,62273139)$

$= \boxed{1,557543232 = w_1 \cong y(0,6)}$

b) Halle el error relativo sabiendo que la solución exacta es $y(t) = \frac{1}{1-t^2}$

$y(0,6) = \frac{1}{1-(0,6)^2} = 1,5625$

$err\% = \frac{1,5625 - 1,557543232}{1,5625} = \boxed{0,32\% = err\%}$